**УДК 512.5**

***Иванов А. В.***

***Студент***

***4 курс, Математическое образование***

***СурГПУ***

***Россия, Сургут***

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕКТОРНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МЕРНОСТИ**

*В статье представлено доказательство теоремы, обобщающей теорему о векторном решении системы линейных уравнений третьего порядка на многомерный случай. Математические модели процессов часто или сразу строятся как линейные алгебраические системы или сводятся к ним. Разнообразие методов решения систем уравнений позволяет под данный пример подобрать самый рациональный.*

Пусть дана система линейных уравнений

$\left\{\begin{array}{c}a\_{1}x\_{1}+a\_{2}x\_{2}+a\_{3}x\_{3}=p,\\b\_{1}x\_{1}+b\_{2}x\_{2}+b\_{3}x\_{3}=q,\\c\_{1}x\_{1}+c\_{2}x\_{2}+c\_{3}x\_{3}=r.\end{array}\right.$ (1)

Теорема 1[4]. Решением системы (1) являются координаты вектора

$$\vec{x}=\frac{\vec{h}}{\left|\vec{h}\right|^{2}}.$$

Данная теорема доказана А. С. Ярским. Доказательство представлено в журнале «Математика в школе» №6 1996 года.



 Рис. 1 Рис. 2

Возьмём систему, состоящую из *n*-уравнений с *n*-неизвестными:

$\left\{\begin{array}{c}a\_{1}x\_{1}+a\_{2}x\_{2}+…+a\_{n}x\_{n}=p,\\b\_{1}x\_{1}+b\_{2}x\_{2}+…+b\_{n}x\_{n}=q,\\…\\g\_{1}x\_{1}+g\_{2}x\_{2}+…+g\_{n}x\_{n}=u,\end{array}\right.$ где $p∙ q∙…∙u\ne 0$ (2)

и предпримем попытку распространить теорему 1 на *n*-мерную среду.

Теорема 2. Решением системы (2) являются координаты вектора

$$\vec{x}=\frac{\vec{h}}{\left|\vec{h}\right|^{2}}.$$

Доказательство. Введём векторы

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\begin{array}{c}\vec{a}=a\_{1}\vec{i}+a\_{2}\vec{j}+a\_{3}\vec{k},\\\vec{b}=b\_{1}\vec{i}+b\_{2}\vec{j}+b\_{3}\vec{k},\\…\\\vec{g}=g\_{1}\vec{i}+g\_{2}\vec{j}+g\_{3}\vec{k},\end{array}}{\vec{x}=x\_{1}\vec{i}+x\_{2}\vec{j}+x\_{3}\vec{k},}$$

и перепишем систему в виде:

$$\left\{\begin{array}{c}\vec{a}∙\vec{x}=p,\\\vec{b}∙\vec{x}=q,\\...\\\vec{g}∙\vec{x}=u,\end{array}\right.$$

и построим фигуру $OAB…G$, рёбрами которой являются векторы $\vec{a}, \vec{b},…, \vec{g}$, где вершина $O$ – начало системы координат. На сторонах, отмечаем точки $K, L,… , R$, такие что

$$\vec{OK}=\frac{\vec{OA}}{p}, \vec{OL}=\frac{\vec{OB}}{q}, ….$$

Построим гиперплоскость $ ω$, проходящую через эти точки, уравнение которой получим с помощью определителя[3]:

$$\vec{OK}=\frac{\vec{OA}}{p}, \vec{OL}=\frac{\vec{OB}}{q}, …;$$

$$\left(\vec{MK}, \vec{ML},…,\vec{MT}\right)=0;$$

$\left|\begin{matrix}x\_{1}-\frac{a\_{1}}{p}&x\_{2}-\frac{a\_{2}}{p}&\cdots &x\_{n}-\frac{a\_{n}}{p}\\\frac{b\_{1}}{q}-\frac{a\_{1}}{p}&\frac{b\_{2}}{q}-\frac{a\_{2}}{p}&\cdots &\frac{b\_{n}}{q}-\frac{a\_{n}}{p}\\\vdots &\vdots &\ddots &\vdots \\\frac{g\_{1}}{u}-\frac{a\_{1}}{p}&\frac{g\_{2}}{u}-\frac{a\_{2}}{p}&\cdots &\frac{g\_{n}}{u}-\frac{a\_{n}}{p}\end{matrix}\right|=0$; (3)

$M(x\_{1}, x\_{2}, …, x\_{n})$ – произвольная точка $ω.$

После вычисления определителя и преобразований получим линейное уравнение $ω$:

$A\_{1}x\_{1}+A\_{2}x\_{2}+...+A\_{n}x\_{n}+D=0$.

Опустим на $ω$ перпендикуляр $h$ из точки $O(0, 0, …, 0)$. Для этого найдём пересечение прямой, проходящей через точку $O(0, 0, …, 0)$ в направлении нормального вектора $ω$ $\vec{N}=(A\_{1}, A\_{2}, …,A\_{n})$, и $ω$:

$$\left\{\begin{array}{c}A\_{1}x\_{1}+A\_{2}x\_{2}+…+A\_{n}x\_{n}+D=0,\\\frac{x\_{1}}{A\_{1}}=\frac{x\_{2}}{A\_{2}}=…=\frac{x\_{n}}{A\_{n}}=t,\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}A\_{1}x\_{1}+A\_{2}x\_{2}+…+A\_{n}x\_{n}+D=0,\\x\_{1}=t∙A\_{1},\\…\\x\_{n}=t∙A\_{n}.\end{array}\right.$$

Найдём $t$ и подставим его в параметрическое уравнение прямой. Получим точку

 $H\left(h\_{1}, h\_{2}, …, h\_{n}\right),$ $ OH=h, h\_{i}=t∙i$

Найдём скалярное произведение:

$\vec{a}∙\vec{h}=p\left(\frac{\vec{a}}{p}∙\vec{h}\right)=p\left(\vec{OK}∙\vec{h}\right)=p\left|\vec{h}\right|∙\left|\vec{OK}\right|\cos(α)$,

где $α$ – угол между векторами $\vec{h}$ и $\vec{OK}$. Т.к. $h$ перпендикулярно $ω$, то из $∆KOH$:

$\left|\vec{OK}\right|∙\cos(α)=\left|\vec{h}\right|$.

Следовательно,

$\vec{a}∙\vec{h}=p\left|\vec{h}\right|^{2}$,

откуда

$\vec{a}∙\vec{x}=\frac{\vec{a}∙\vec{h}}{\left|\vec{h}\right|^{2}}=p ⇒ \vec{x}=\frac{\vec{h}}{\left|\vec{h}\right|^{2}} $.

Теорема доказана.

**ВЫВОД**

Использование векторов помогает решать системы уравнений альтернативным методом. В работе проведено обобщение метода на многомерный случай и приведён пример решения системы линейных уравнений.

В отличие от метода Крамера, в векторном методе необходимо находить лишь один определитель в ходе решения. Метод Гаусса не включает в себя проверки на определённость системы, а в векторном методе на втором этапе необходимо вычислить определитель, который и укажет на определённость системы.

Метод показывает альтернативный способ геометрической интерпретации системы уравнений.

**Использованные источники**

1. Александров, А. Д. Геометрия: учебник / А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. — 2-е изд., исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2010. — 612 с
2. Александров, А. Д. Математика, ее содержание, методы и значение. Том третий / А. Д. Александров и др. – М.: Издательство академии наук СССР, 1956. – 336 c.
3. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства / А. Б. Розенфельд. – М.: Наука, 1966. – 547 с.
4. Ярский, А. С. Геометрия линейной системы и описанный шар [Текст] / А. С. Ярский // Математика в школе. 1995, №6. – С. 60 – 62.

Почта автора thesanya95@mail.ru