О сумме квадратов четных и нечетных натуральных чисел среди n первых натуральных чисел.

Аннотация. Рассмотрено одно из свойств таблицы Пифагора. Используя это свойство получен простой способ вывода формул для суммы квадратов n первых натуральных чисел, суммы квадратов четных и нечетных чисел среди n первых натуральных чисел. И при этом было поставлено условие не прибегать к методу математической индукции.

Таблица умножения, она же таблица Пифагора была известна несколько тысяч лет назад. На рисунке представлена таблица 9 на 9. Устроена таблица просто. Первая строчка – это последовательность натуральных чисел от 1 до 9. Вторая строчка начинается с 2 и каждое следующее число больше предыдущего на 2, третья строчка начинается с 3 и каждое следующее число больше предыдущего на 3 и т.д. Таким образом, каждая строка и каждый столбец есть арифметические прогрессии. Таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний угол. Эту диагональ называют главной. Таблица обладает многими чудесными свойствами. Эти свойства описаны в замечательной статье Н.Авилова [1]. Используя одно из таких свойств таблицы Пифагора, найдем формулы для подсчета суммы квадратов первых n натуральных чисел, суммы квадратов нечетных и четных чисел среди первых n натуральных чисел. Отметим также, что по главной диагонали расположены квадраты последовательных натуральных чисел. Рассмотрим диагонали таблицы, «перпендикулярно» главной диагонали. Один край такой диагонали расположен в первом столбце таблицы, а второй край- в первой строке таблицы.

1	2	3	4	5	6	7	***8***	***9***
2	***4***	6	8	10	12	***14***	***16***	18
3	6	***9***	12	15	***18***	***21***	24	27
4	8	12	***16***	***20***	***24***	28	32	36
5	10	15	***20***	***25***	30	35	40	45
6	12	***18***	***24***	30	***36***	42	48	54
7	***14***	***21***	28	35	42	***49***	56	63
8	***16***	24	32	40	48	56	***64***	72
9	18	27	36	45	54	63	72	***81***

Таблица Пифагора.

Для удобства наблюдения за этими диагоналями повернем таблицу на 45 градусов по часовой стрелке. Рассмотрим суммы чисел в строках полученной таблицы. Эта суммы посчитаны и записаны в правом столбце. Можем непосредственно убедиться в известном свойстве этих сумм. В строках, начинающихся четным числом, расположены числа, сумма которых равна сумме квадратов четных чисел среди первых n натуральных чисел. В строках, начинающихся нечетным числом, расположены числа, сумма которых равна сумме квадратов первых нечетных чисел среди первых n натуральных чисел. Введем обозначения и убедимся непосредственно в верности этого свойства на следующих примерах. Вычислим сумму квадратов четных (нечетных) чисел и сравним ее с суммой чисел, расположенных в соответствующих строках. Сумма чисел на диагонали записана в правом столбце.:

$A_1 = 1 = 1^2$

$A_2 = 2 + 2 = 4 = 2^2$

$A_3 = 3 + 4 + 3 = 10 = 1^2 + 3^2 = A_1 + 3^2$

$A_4 = 4 + 6 + 6 + 4 = 20 = 2^2 + 4^2 = A_2 + 4^2$

$A_5 = 5 + 8 + 9 + 8 + 5 = 35 = 1^2 + 3^2 + 5^2 = A_3 + 5^2$

$A_6 = 6 + 10 + 12 + 12 + 10 + 6 = 56 = 2^2 + 4^2 + 6^2 = A_4 + 6^2$.

								1								
							2		2							
						3		***4***		3						
					4		6		6		4					
				5		8		***9***		8		5				
			6		10		12		12		10		6			
		7		12		15		***16***		15		12		7		
	8		***14***		***18***		***20***		***20***		***18***		***14***		***8***	
9		***16***		***21***		***24***		***25***		***24***		***21***		***16***		***9***

1	A_1
4	A_2
10	A_3
20	A_4
35	A_5
56	A_6
84	A_7
120	A_8
165	A_9

В общем виде получаем $A_n = A_{n-2} + n^2$. То есть A_n – это сумма квадратов четных чисел, если n-четное, либо сумма квадратов нечетных чисел, если n-нечетное.

Например,

A_2 -это сумма четных натуральных чисел среди первых двух натуральных чисел, то есть среди чисел 1, 2 и таковое одно – 2.

A_3 - это сумма нечетных натуральных чисел среди первых трёх натуральных чисел. Среди чисел 1, 2, 3 таких два – 1 и 3.

A_4 - это сумма четных натуральных чисел среди 4-х первых натуральных чисел. Среди чисел 1, 2, 3, 4 таких два – 2 и 4.

Этот факт сам по себе изумительный. Вычислим непосредственно сумму чисел, стоящих на диагонали. А с другой стороны, по свойству эта сумма равна сумме квадратов четных или нечетных чисел среди первых n натуральных.

Рассмотрим таблицу Пифагора размером n на n. Обозначим через $Q_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Тогда на диагонали, «перпендикулярной» главной диагонали и начинающейся с числа n, расположены числа, сумма которых равна сумме квадратов четных (для определенности) чисел среди первых n натуральных чисел $A_n = 2^2 +$

$4^2 + \dots + n^2$. На диагонали выше и начинающейся с числа (n-1), расположены числа, сумма которых равна сумме квадратов нечетных чисел среди первых n натуральных чисел $A_{n-1} = 1^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2$. Добавим к сумме квадратов четных чисел A_n сумму квадратов нечетных чисел A_{n-1} и получим сумму квадратов всех n первых натуральных чисел Q_n, то есть $A_n + A_{n-1} = Q_n$. И теперь непосредственно посчитаем сумму чисел на диагонали. При этом удобнее смотреть на исходную таблицу Пифагора. Чтобы понять как устроены числа на диагонали, начнем с примера для A_5. Первое число на диагонали - это 5·1, для второго числа на диагонали поднимемся на одну строчку вверх и на один столбец вправо – (5-1)·(1+1)=4·2 и так далее

$$A_5 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5$$

Теперь для A_n

$$A_n = n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + (n-2) \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot (n-1) + 1 \cdot n = \sum_{1 \le k \le n} (n-k+1)k =$$

$$= \sum_{1 \le k \le n} (nk - k^2 + k) = \sum_{1 \le k \le n} (n+1)k - \sum_{1 \le k \le n} k^2 =$$

$$= (n+1) \sum_{1 \le k \le n} k - \sum_{1 \le k \le n} k^2$$

Посмотрим, что получили:

$\sum_{1 \le k \le n} k = 1 + 2 + \cdots + n -$ это сумма арифметической прогрессии и равна $\frac{(n+1)n}{2}$,

$\sum_{1 \le k \le n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ – это сумма квадратов и мы обозначили ее через Q_n.

И теперь

$$A_n = (n+1)\frac{(n+1)n}{2} - Q_n =$$

Окончательно получаем

$$A_n = \frac{n(n+1)^2}{2} - Q_n$$

Запишем это и для A_{n-1}

$$A_{n-1} = \frac{(n-1)(n-1+1)^2}{2} - Q_{n-1}$$

Сложим левые и правые части этих соотношений

$$A_n + A_{n-1} = \frac{n(n+1)^2}{2} - Q_n + \frac{(n-1)n^2}{2} - Q_{n-1}$$

Вспомним, что сумма слева $A_n + A_{n-1} = Q_n$, сумма квадратов $Q_n = Q_{n-1} + n^2$

С учётом этого, соотношение перепишется так

$$Q_n = \frac{n(n+1)^2}{2} - Q_n + \frac{(n-1)n^2}{2} - (Q_n - n^2)$$

И в результате

$$Q_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}$$

Как видим первое выражение для суммы квадратов не очень «симметричное». Некоторым больше нравится второй вариант.

Найдем теперь выражение для суммы квадратов четных (нечетных) чисел A_n.

Ранее мы получили такое соотношение

$$A_n = \frac{n(n+1)^2}{2} - Q_n$$

и сейчас можем использовать найденную формулу для Q_n:

$$A_n = \frac{n(n+1)^2}{2} - Q_n = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

что приводит нас к следующему соотношению

$$A_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

А теперь поступим иначе. Сначала вычислим формулу для A_n. Для этого запишем выражения для A_n и A_{n-1}:

$$A_n = \frac{n(n+1)^2}{2} - Q_n$$

$$A_{n-1} = \frac{(n-1)(n-1+1)^2}{2} - Q_{n-1}$$

Помним, что $A_n + A_{n-1} = Q_n$, и сверх того $A_n = A_{n-2} + n^2$, откуда

$$A_n = \frac{n(n+1)^2}{2} - A_n - \frac{1}{4}(n-1)n^2 + \frac{1}{2}A_n - \frac{n^2}{2}$$

Что приводит к такому выражению для A_n :

$$\frac{3}{2}A_n = \frac{1}{4}n(n^2 + 3n + 2)$$

И вот

$$A_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

Заметим, что мы не пользовались четностью числа n и данное выражение справедливо для любого натурального n. Отметим полную «симметрию» полученного выражения. В числителе расположено произведение трех последовательных натуральных чисел.

Формула для суммы квадратов теперь выводится в одну строчку:

$$Q_n = A_n + A_{n-1} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Конечно, эти формулы и известны, и доказаны. Цель настоящей статьи: продемонстрировать наиболее простой метод вывода формул для суммы квадратов натуральных чисел, квадратов четных и нечетных натуральных чисел. И при этом не прибегать к методу математической индукции. В замечательной книге А.Д.Блинкова

[2] приведен способ вывода формул как для суммы квадратов, так и для более старших степеней натуральных чисел.

Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей, в которой Нилом Слоуном собраны записи о всех известных последовательностях целых чисел. Энциклопедия работает по принципу вики. В настоящий момент содержит более двухсот тысяч последовательностей и все их свойства. Каждой последовательности присвоен уникальный номер. Чтобы определить вид последовательности необходимо ввести несколько ее первых элементов. Например, для последовательности из квадратов четных натуральных чисел 4, 20, 56, 120 энциклопедия выдаст ее уникальный номер A002492, словесное описание *Sum of the first n even squares* и формулу 2n(n+1)(2n+1)/3. Буква n в этой формуле имеет несколько иной смысл. Здесь -это именно количество четных чисел. При n=1 получим 4, при n=2 получим 20, при n=3 получим 56.

Литература

1. Авилов Н. Сюрпризы таблицы умножения. Квант. №2, 2000.-С.32-33.
2. Блинков А.Д. Последовательности. -М.: МЦНМО, 2018.-С. 2.